Matrizes

Matrizes são tabelas retangulares utilizadas para organizar dados numéricos, onde cada número é chamado elemento da matriz, as filas horizontais são chamadas linhas e as filas verticais são chamadas colunas

1. Definições

1.1. Uma **matriz** é um arranjo com elementos dispostos em linhas e colunas. No exemplo abaixo a matriz ***A*** possui *m* linhas e *n* colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2. Se a matriz tem *m* linhas e *n* colunas, dizemos que tem **dimensão** $m{\times}n$. Uma matriz quadrada é aquela na qual o número de linhas (*n*) é igual ao número de colunas, e dizemos que tem ordem *n*.

1.3. A matriz ***D*** abaixo é chamada de **matriz diagonal** de ordem *n* , pois os termos da diagonal principal são diferentes de zero e os termos de fora da diagonal principal são nulos.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

1.4. A **matriz identidade**, denotada por ***I,*** é uma matriz diagonal com os elementos da diagonal iguais a 1. A matriz identidade é o elemento neutro do produto de matrizes (v. mais adiante).

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

1.5. Dada uma matriz ***A*** de dimensão $m{\times}n$ **,** a **matriz transposta** de ***A*** é uma matriz de dimensão $n{\times}m$, denotada por $\boldsymbol{A^t}$, onde

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ sendo } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.6. As matrizes quadradas de ordem *n* abaixo são *triangulares*: as da forma *a*) chamamos de *triangular inferior;* as da forma *b*), *triangular superior*.

$$(a)\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (b)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Na matriz triangular superior temos sempre $a_{ij} = 0$ para $i > j$, e na matriz triangular inferior $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

1.7. A **soma das matrizes *A*** e ***B*** de dimensão $m \times n$ é uma matriz de dimensão $m \times n$.
Se ***C = A + B,*** os elementos (c_{ij}) são definidos por:
$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $i = 1,2,\ldots,m$ e $j = 1,2,\ldots,n$.

1.8. O **produto da matriz *A***$(m \times n)$ **por um escalar** p é dado por:
B $= p.$ ***A,*** onde os elementos $b_{ij} = p.\ a_{ij}$, para $i = 1,2,\ldots,m$ e $j = 1,2,\ldots,n$.

1.9. A **subtração de matrizes** é definida por ***A – B = A + (-1)B***

1.10. Sendo ***A*** e ***B*** matrizes $n \times m$ e r e s escalares, as seguintes equações matriciais são válidas:
A + B = B + A
(A+B) + C = A + (B + C)
r***(A + B) =*** r***A +*** r***B***
$(r+s)$ ***A =*** r***A +*** s***A***
$r(s$***A***$) = (rs)$ ***A***

1.11. Seja ***A*** uma matriz $m \times p$ e ***B*** uma matriz $p \times n$. O **produto das matrizes *A* e *B*** é uma matriz de dimensão $m \times n$. Se ***C = A . B,*** os elementos (c_{ij}) são:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

para $i = 1,2,..,m$ e $j = 1,2,\ldots,n$.
Observe que o produto de matrizes só é possível quando o número de colunas da matriz da esquerda for igual ao número de linhas da matriz da direita.

O produto de matrizes não é comutativo. Sendo ***A*** e ***B*** matrizes quadradas de ordem *n,* em geral, ***A . B ≠ B. A .***

Seja ***A*** uma matriz quadrada de ordem *n* e ***I*** a matriz identidade de ordem *n. Então,*
A.I = I. A = A.
Se ***A, B*** e ***C*** são matrizes de dimensões apropriadas e *r* e s são escalares, então as equações matriciais abaixo são válidas:

A.(B.C) = (A.B).C
A.(B+C) = A.B + A.C
(A+B).C = A.C + B.C
*r**A.**s**B** = (rs) **(A.B)***

1.12 Matrizes booleanas – São matrizes que têm apenas elementos iguais a 0 ou 1. Podemos definir uma operação booleana de multiplicação ***A×B*** para matrizes booleanas usando multiplicação e soma booleanas, ao invés de multiplicação e adição usuais.
Multiplicação booleana : x^y = min(x,y)
Adição booleana: x v y = max(x,y)
Com estas definições, as tabelas para as operações booleanas de multiplicação e adição ficam

x	y	x^y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	x v y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A multiplicação booleana de matrizes A X B é definida por:

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{m} (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e o produto booleano $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ é

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios – Matrizes

1) Dê a soma diagonal principal da matriz $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

2) Como pode ser denominada a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

3) Se $A = \begin{bmatrix} 2x \\ x^2 - a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ são iguais quanto vale a?

4) Qual o valor resultante de $4 \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é:

5) Dê a matriz transposta de é:. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

6) Escreva na forma explícita as matrizes:
a) {aij} de ordem 3 x 5
b) {aij} de ordem 3 x 5

7) Escreva explicitamente a matriz A=(aij) nos seguintes casos:
a) A é de ordem 3 x 2 com aij = i – j + 3
b) A é quadrada de ordem 3 com aij = 2i + j para i = j 2i – j para i ≠ j

8) Determine a matriz (aij)3x3, tal que aij = 2(2i+j).

9) Se r=2, s= -3

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Desenvolva as seguintes operações, se possível:

a)A+D
b)rC
c)D-A
d)s(A+D)
e)A.C
f)$D^2 = D.D$
g)B.A-D
h) r(sB)
i)C.A
j)D.C

10) Para as matrizes booleanas,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{B}= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre $A \wedge B$, $A \vee B$, AxB e BxA.

Bibliografia: GERSTING, Judith L.. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação.* Rio de Janeiro – RJ: LTC, 2004.