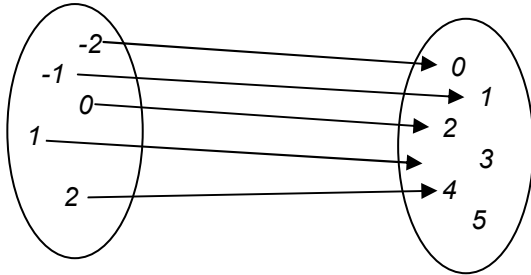


FUNÇÃO

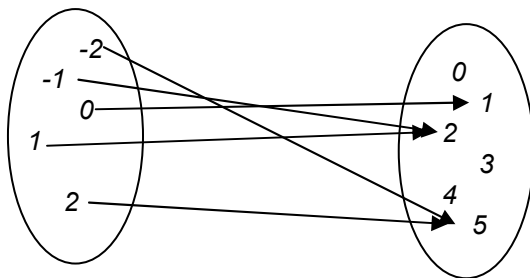
Definição: Dados dois conjuntos A e B define-se como função de A em B a toda relação em que para todo x de A existe um único correspondente em B

Exemplo: Dado os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ São funções de A em B as relações

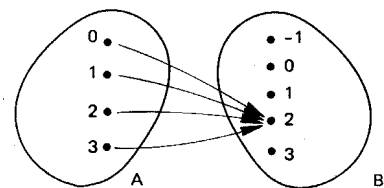
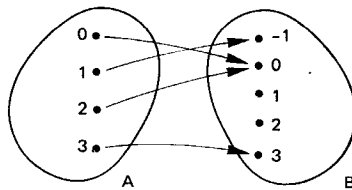
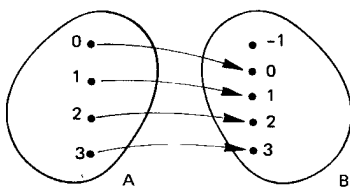
a) $R_1 = \{(x,y) \in AXB / y = x + 2\}$



b) $R_2 = \{(x,y) \in AXB / y = x^2 + 1\}$



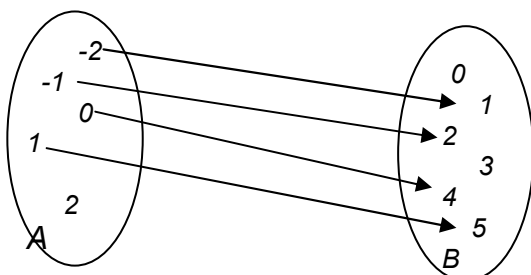
Outros exemplos



Contra - exemplos

Dado os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ Não são funções de A em B as relações

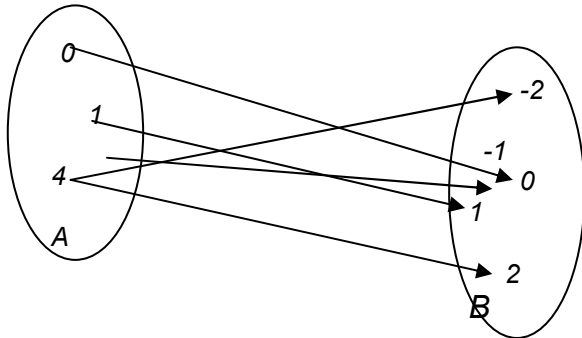
$R = \{(x,y) \in AXB / y = x + 4\}$



A relação ao lado não é função pois Existe $x \in A$, no caso $x=2$, que não tem correspondente em B.

Dado os conjuntos $A = \{0, 1, 4\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ Não são funções de A em B as relações

$$R = \{(x,y) \in AXB / y = \sqrt{x}\}$$



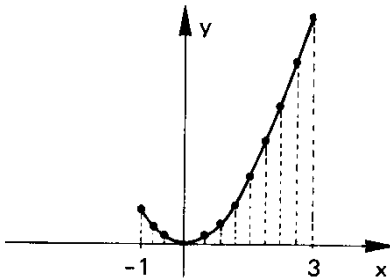
A relação ao lado não é função pois Existe $x \in A$, no caso $x=1$ ou $x = 4$ que se corresponde com mais de um elemento de B.

Reconhecimento de uma função representada graficamente.

- Podemos verificar pela representação cartesiana da relação f de A em B se é ou não função; basta verificarmos se a reta paralela ao eixo y conduzida pelo ponto $(x,0)$, em que $x \in A$, encontra sempre o gráfico em um só ponto.

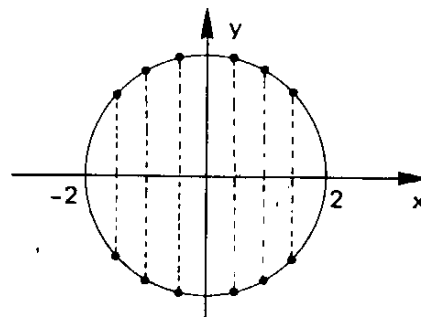
Exemplo

$$A = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 3\}$$



Contra - exemplo

$$A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 2\}$$



Notação das funções

Toda função é uma relação binária de A em B; portanto, toda função é um conjunto de pares ordenados.

Geralmente, existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado $x \in A$, determina-se $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$, então $f = \{(x,y) | x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}$

Exemplos:

- $f: A \rightarrow B$ tal que $y = 2x$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = x^2$

Imagem de um elemento

Se $(a,b) \in f$, o elemento b é chamado imagem de a pelo valor de f no elemento a , e indicamos $f(a) = b$.

Exemplo:

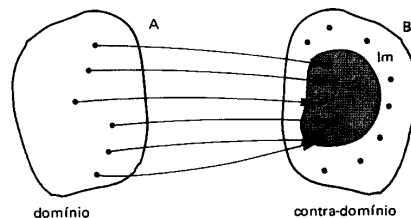
Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = 2x + 1$, então:

- a) a imagem de 0 pela função f é 1, isto é: $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$
- b) a imagem de -2 pela função f são -3, isto é: $f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$

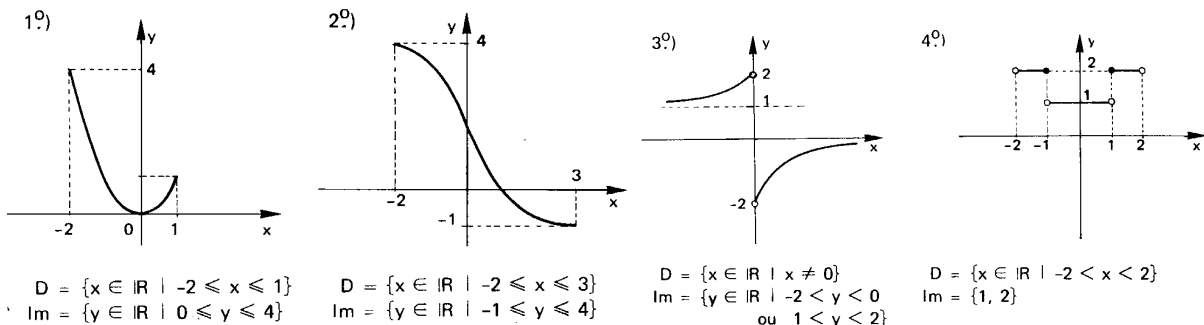
Domínio e imagem

Chamamos de domínio o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções: domínio = conjunto de partida, isto é, $D = A$.

Chamamos de imagem o conjunto Im dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x,y) \in f$; portanto: imagem é subconjunto do contradomínio, isto é, $Im \subset B$.

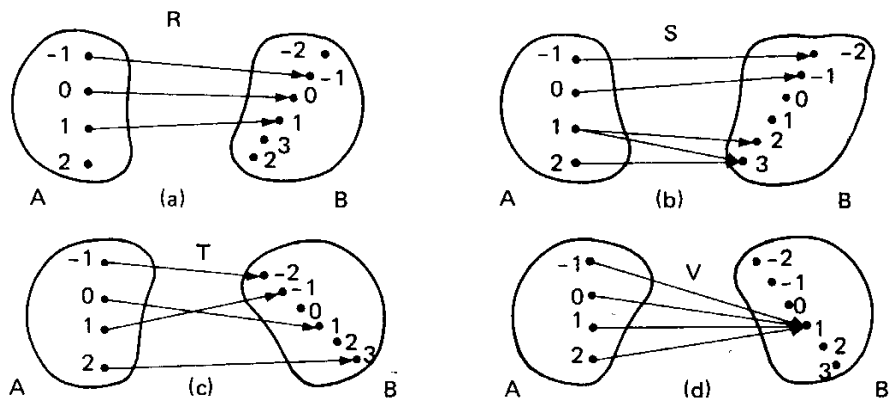


Notemos, que, feita a representação cartesiana da função f , temos:

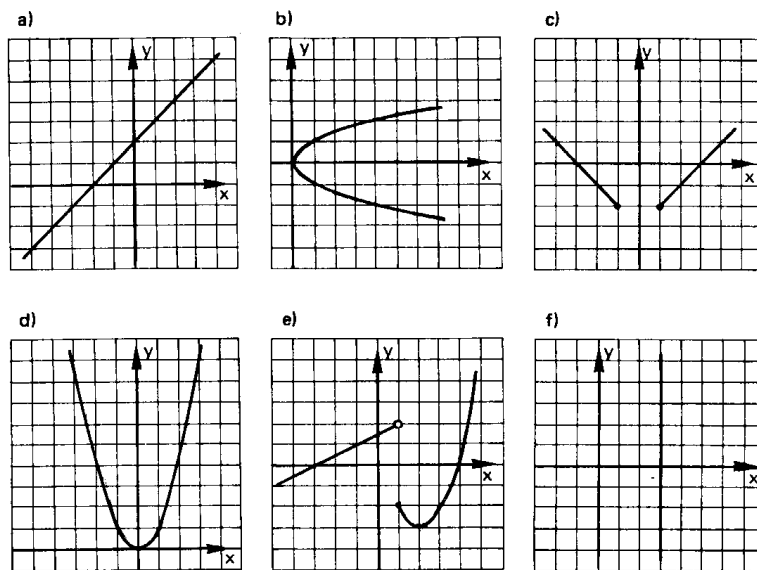


Exercícios

- 1) Dado os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e as relações definidas abaixo, determine essas relações e identifique as que são funções;
 - a) $R_1 = \{(x,y) \in AXB \mid y = 2x + 3\}$
 - b) $R_2 = \{(x,y) \in AXB \mid y = x + 6\}$
 - c) $R_3 = \{(x,y) \in AXB \mid y = x^2 + 3\}$
 - d) $R_3 = \{(x,y) \in AXB \mid y = x^2 - 2\}$
- 2) Estabeleça se cada um dos esquemas das relações abaixo define ou não uma função de $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, justificando a resposta.



3) Quais das relações de \mathbb{R} em \mathbb{R} , cujos gráficos aparecem abaixo, são funções? Justifique.



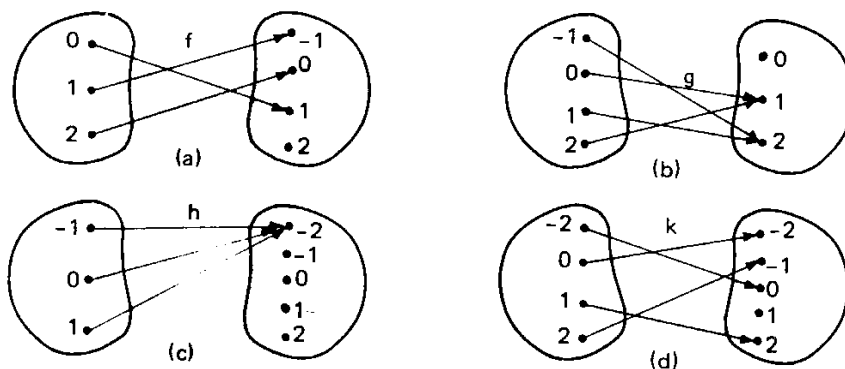
4) Seja f a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = 3x - 2$. Calcule:

- a. $f(2)$
- b. $f(-3)$
- c. $f(0)$
- d. $f\left(\frac{3}{2}\right)$

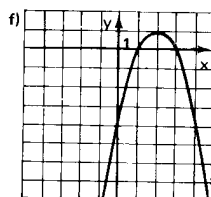
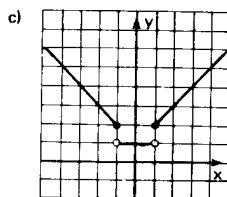
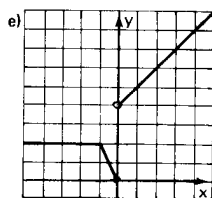
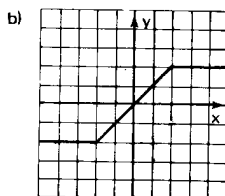
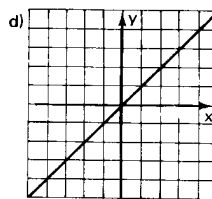
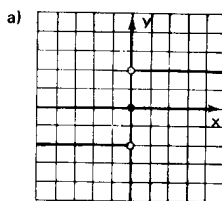
5) Seja f a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = x^2 - 3x + 4$

- a. $f(2)$
- b. $f(-1)$
- c. $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- d. $f\left(-\frac{1}{3}\right)$
- e. $f(\sqrt{3})$

6) Estabeleça o domínio e a imagem das funções abaixo:



7) Nos gráficos cartesianos das funções abaixo representadas, determine o conjunto imagem.



8) Dê o domínio das seguintes funções reais:

a) $f(x) = 3x + 2$

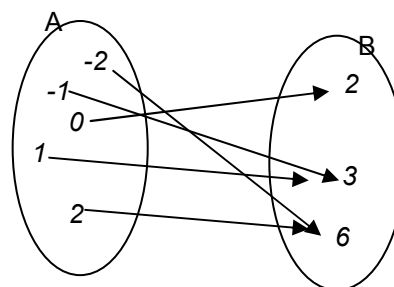
b) $g(x) = \frac{1}{x+2}$

c) $p(x) = \sqrt{x-1}$

Função sobrejetora, Injetora, Bijetora e função inversa

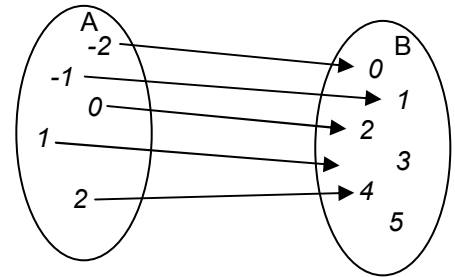
FUNÇÃO SOBREJETORA: Dada uma função $f: A \rightarrow B$, dizemos que uma função é sobrejetora quando $Im(f) = B$ (a imagem de f coincide com o contra-domínio).

Exemplo: Dado os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 6\}$ a função $f = \{(x,y) \in A \times B / y = x^2 + 2\}$ é sobrejetora; Pois $Im(f) = B$



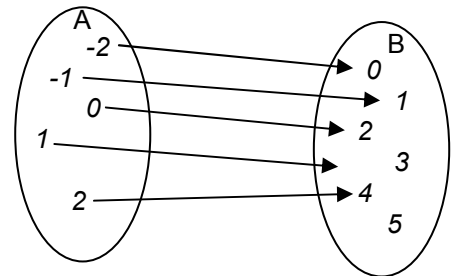
Contra exemplo

Dado os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
a função de A em B definida por $y = x + 2$
não é sobrejetora, pois $5 \in B$ e não tem
correspondência com elementos de A

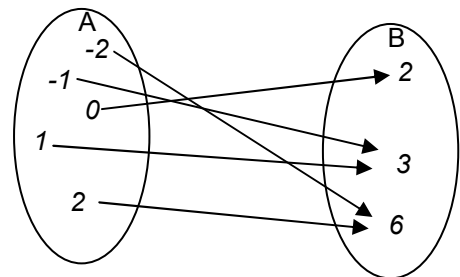


FUNÇÃO INJETORA: Dada uma função $f: A \rightarrow B$, dizemos que $f(x)$ é injetora se para todo $x, x' \in A$ se $x \neq x' \leftrightarrow f(x) \neq f(x')$, ou seja, nenhum elemento de B é imagem de dois elementos distintos de A.

Exemplo: Dado os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
a função de A em B definida por $y = x + 2$ é injetora;
Todos os elementos de B, que possui correspondência
com elementos de A tem um único correspondente.



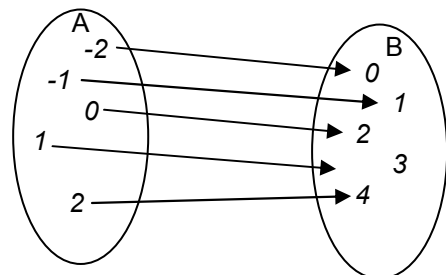
Contra exemplo Dado os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 6\}$
a função $f = \{(x, y) \in A \times B / y = x^2 + 2\}$ não é injetora, pois
existe elemento de B, no caso os elementos 3 e 6,
que possuem mais que uma correspondência
com elementos de A.



FUNÇÃO BIJETORA : Uma função é bijetora quando for injetora e sobrejetora.

Exemplo: Dado os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
a função de A em B definida por $y = x + 2$ é:

- Sobrejetora, pois todos os elementos de B possuem correspondência com elementos de A
- Injetora, pois todos os elementos de B que se correspondem com elementos de A tem só um correspondente; Logo é bijetora



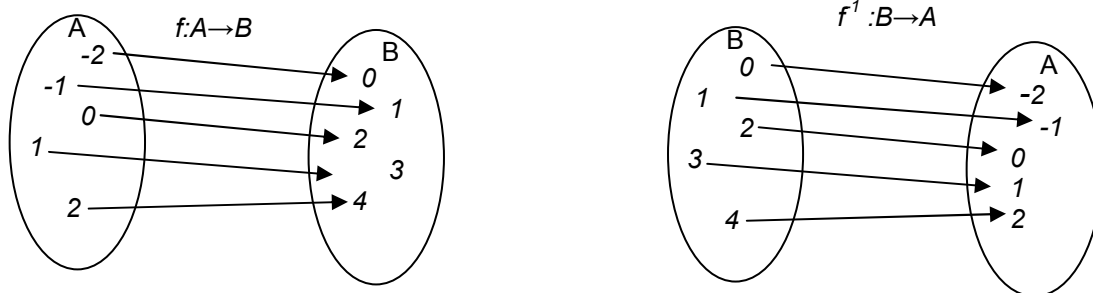
Segundo exemplo: A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x+1$ é bijetora, pois é injetora e sobrejetora sobre \mathbb{R}

FUNÇÃO INVERSA

Uma função $f: A \rightarrow B$ é inversível se a relação inversa também for uma função. Notação: f^{-1}

Propriedade: Uma função é inversível se e somente se for Bijetora

Exemplo Dado os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a função de A em B definida por $y = x + 2$ possui inversa pois:



Assim

$$f: A \rightarrow B = \{(-2,0), (-1,1), (0,2), (1,3), (2,4)\} \text{ e } f^{-1}: B \rightarrow A = \{(0,-2), (1,-1), (2,0), (3,1), (4,2)\}$$

Como a função de A em B é definida por $y = x + 2$ sua inversa f^{-1} é definida de B em A e tem por lei: $y = x - 2$.

Exemplo:

Determinar a função inversa, se existir, da função $y = -5x + 4$ definida de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

A função é inversível pois o Domínio é \mathbb{R} e o conjunto Imagem também é \mathbb{R}

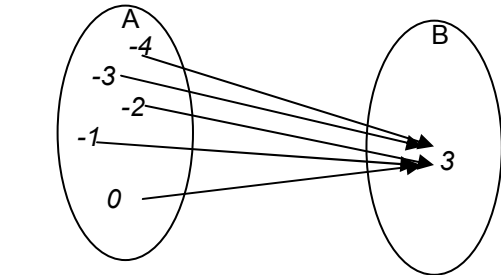
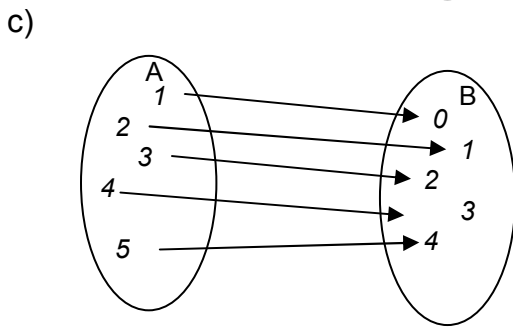
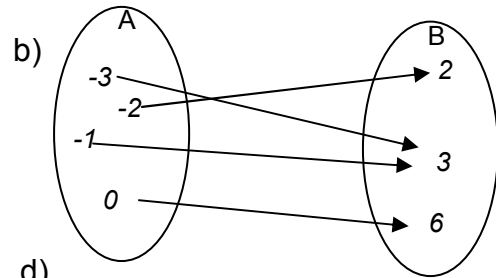
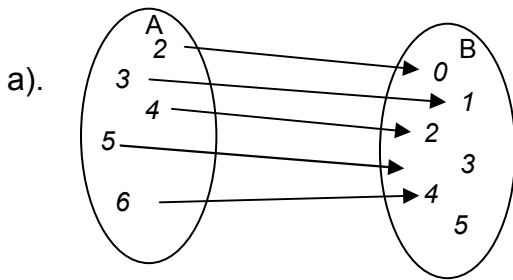
Logo podemos obter sua inversa. Como $y = -5x + 4$ para obter a inversa basta trocar x por y e vice-versa, isolando novamente o y. Assim:

$$\text{Trocando x por y temos : } x = -5y + 4$$

$$\text{Isolando novamente o y teremos } y = \frac{-x+4}{5}$$

Exercícios

1) Classifique cada uma das funções abaixo como sobrejetora, injetora ou bijetora



2) Dados os conjuntos $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-5, -3, -1, 1, 3\}$, $C = \{1, 2, 4, 10\}$ e $D = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ classifique as funções abaixo como sobrejetora, injetora ou bijetora

a) $f: A \rightarrow B; y = 2x + 1$

b) $f: A \rightarrow C; y = x^2 + 1$

c) $f: A \rightarrow D; y = -x + 3$

3) Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 5, 10\}$.

a) Determine a inversa da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2 + 1\}$

b) A relação R é função? Caso seja função é invertível? Por quê?

4) Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e a função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = x + 1$ verifique se a função é bijetora e em caso afirmativo determine f^{-1} .

5) A função $y = -x + 4$ definida de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ determine $f^{-1}(3)$

6) Determine a função inversa de cada uma das funções bijetoras, sendo dados o domínio e o contradomínio.

a) $y = 3x - 4$ em $D_f = \mathbb{R}$ e $CD_f = \mathbb{R}$

b) $y = -5x + 7$ em $D_f = \mathbb{R}$ e $CD_f = \mathbb{R}$

c) $y = \frac{x+3}{x-4}$ em $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ e $CD_f = \mathbb{R} - \{4\}$

d) $y = \frac{x-6}{x+2}$ em $D_f = \mathbb{R} - \{6\}$ e $CD_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

Funções Especiais e função composta

Função Teto (representação $f(x) = \lceil x \rceil$)

Definida de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ a função teto associa a cada x real o menor inteiro maior ou igual a x .

Exemplo Seja a função $f(x) = \lceil x \rceil$ determinar:

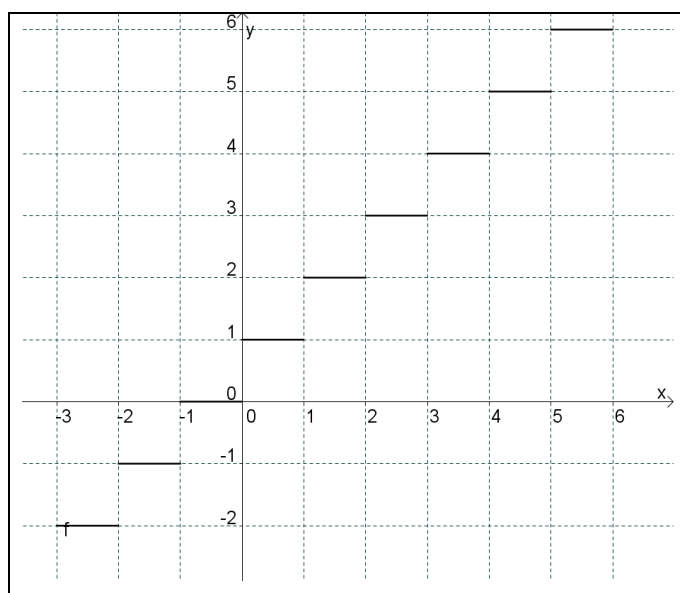
a) $f(3,45) = \lceil 3,45 \rceil = 4$

b) $f(-2,8) = \lceil -2,8 \rceil = -2$

c) $f(0,004) = \lceil 0,004 \rceil = 1$

d) $f(-0,8) = \lceil -0,8 \rceil = 0$

Gráfico da função $f(x) = \lceil x \rceil$



Função Piso (representação $f(x) = \lfloor x \rfloor$)

Definida de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ a função piso associa a cada x real o maior inteiro menor ou igual a x .

Exemplo Seja a função $f(x) = \lfloor x \rfloor$ determinar:

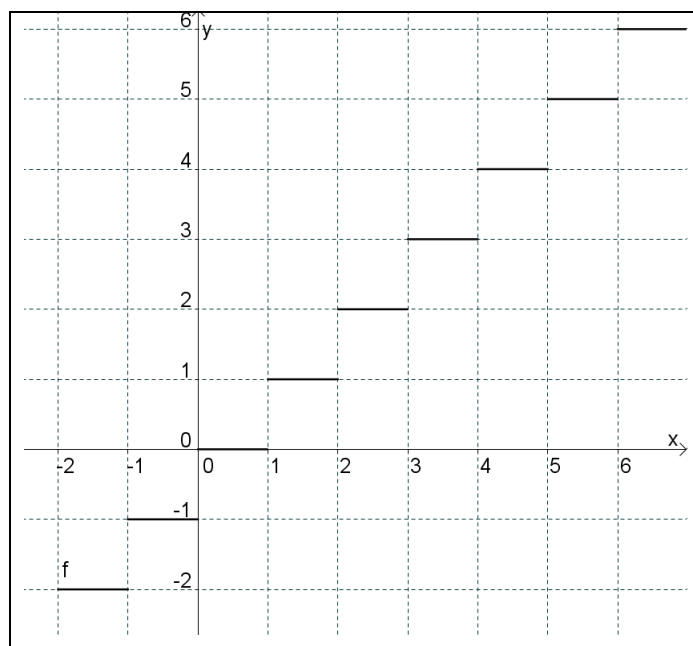
a) $f(3,45) = \lfloor 3,45 \rfloor = 3$

b) $f(-2,8) = \lfloor -2,8 \rfloor = -3$

c) $f(0,004) = \lfloor 0,004 \rfloor = 0$

d) $f(-0,8) = \lfloor -0,8 \rfloor = -1$

Gráfico da função $f(x) = \lfloor x \rfloor$



Função mod = resto da divisão (congruências)

Sejam a , b e r números inteiros com $b > 0$ e $r \geq 0$. Dizemos que a é congruente à r , módulo b , representamos ($a \bmod b \equiv r$) se b for divisor de $a - r$. Para simplificar usaremos a notação: **$a \bmod b = r$**

Ou seja, $a \bmod b = r$, se r , $0 \leq r < b$, for o resto da divisão de a por b . Portanto existe um número inteiro q , tal que $a = b \cdot q + r$

Exemplos :

$35 \bmod 4 = 3$ pois $35 = 8 \cdot 4 + 3$ ou 3 é o resto na divisão de 35 por 4

$25 \bmod 7 = 4$ pois $25 = 7 \cdot 3 + 4$ ou 4 é o resto na divisão de 25 por 7

$18 \bmod 6 = 0$ pois $18 = 6 \cdot 3 + 0$ ou zero é o resto na divisão de 18 por 6

$-21 \bmod 5 = 4$ pois $-21 = 5 \cdot (-5) + 4 = -25 + 4$

$-17 \bmod 5 = 3$ pois $-17 = -4 \cdot 5 + 3$

Função composta

Dados os conjuntos, não vazios, A , B e C e as funções $f:A \rightarrow B$ e $g:B \rightarrow C$. A função $h:A \rightarrow C$ tal que $h(x) = g(f(x))$ é chamada de função composta de g com f , que representaremos por $g \circ f(x)$. Onde lê-se *g composta por f*.

Assim $g \circ f(x) = g(f(x))$ ou a imagem da função g cujo valor de x é dado por $f(x)$

Exemplos Sejam as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 3$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 - 4$, obter:

- a) $g \circ f(5)$
- b) $f \circ g(5)$
- c) $g \circ f(x)$
- d) $f \circ g(x)$

Resolução

a) $g \circ f(5) = g(f(5))$

como $f(5) = 2 \cdot 5 - 3 = 7$, então $g \circ f(5) = g(7) = 7^2 - 4$

logo $g \circ f(5) = 45$

b) $f \circ g(5) = f(g(5))$

como $g(5) = 5^2 - 4 = 21$, então $f \circ g(5) = f(21) = 2 \cdot 21 - 3$

logo $f \circ g(5) = 39$

c) $g \circ f(x) = g(f(x))$

como $f(x) = 2x - 3$, então $g \circ f(x) = g(2x-3) = (2x-3)^2 - 4$

logo: $g \circ f(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 4$

portanto: $g \circ f(x) = 4x^2 - 12x + 5$

d) $f \circ g(x)$

como $g(x) = x^2 - 4$, então $f \circ g(x) = f(x^2 - 4) = 2(x^2 - 4) - 3$

logo $f \circ g(x) = 2x^2 - 8 - 3$

portanto $f \circ g(x) = 2x^2 - 11$

Exercícios:

1) Dada a função $f(x) = \lfloor x \rfloor$ determine a imagem em cada caso:

- a) $f(5,4) =$
- b) $f(-3,9) =$
- c) $f(2,1) =$
- d) $f(-1,4) =$

2) Dada a função $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$ determine a imagem em cada caso:

- a) $f(5,4) =$

- b) $f(-3,9)=$
- c) $f(2,1)=$
- d) $f(-1,4)=$

3) Dada a função $f(x) = \lceil x \rceil$ determine a imagem em cada caso:

- a) $f(5,4)=$
- b) $f(-3,9)=$
- c) $f(2,1)=$
- d) $f(-1,4)=$

4) Dada a função $f(x) = \lceil x^2 \rceil$ determine a imagem em cada caso:

- a) $f(5,4)=$
- b) $f(-3,9)=$
- c) $f(2,1)=$
- d) $f(-1,4)=$

5) Determine x em cada caso

- a) $x = 53 \pmod{4}$
- b) $x = 41 \pmod{3}$
- c) $x = 12 \pmod{3}$
- d) $x = 85 \pmod{6}$
- e) $x = -38 \pmod{3}$
- f) $x = -42 \pmod{5}$

6) Dada as funções $f(x) = x - 4$, $g(x) = -2x + 1$ e $h(x) = x^2 - 1$ determine:

- a) $f \circ g(2) =$
- b) $g \circ f(3) =$
- c) $f \circ h(-1) =$
- d) $h \circ f(-2) =$
- e) $f \circ g(x) =$
- f) $g \circ f(x) =$
- g) $g \circ h(x) =$
- h) $h \circ g(x) =$

7) Dada as funções $f(x) = \lceil x \rceil$ e $g(x) = x^2 - 2$ determine

- a) $f \circ g(1,2)$
- b) $f \circ g(-2,6)$

8) Dada as funções $f(x) = \lfloor x \rfloor$ e $g(x) = x^2 - 2$ determine

c) $f \circ g(1,2)$

d) $f \circ g(-2,6)$